

# IDENTIFIKASI KONDISI KETERKONTROLAN BEBERAPA SISTEM PENDULUM

SAKIRMAN<sup>1</sup>, T. BAKHTIAR<sup>2</sup>, A. KUSNANTO<sup>2</sup>

## Abstrak

Dalam teori pengendalian (*control theory*), keterkontrolan (*controllability*) merupakan isu penting, di mana dalam masalah pengendalian yang dihadapi, input kendali harus dicari sedemikian sehingga keadaan sistem (*system state*) atau output sistem bergerak sesuai dengan yang diharapkan. Keberadaan input kendali sangat bergantung pada keterkontrolan sistem. Dalam tulisan ini diidentifikasi kondisi keterkontrolan beberapa sistem pendulum, meliputi pendulum biasa, pendulum terbalik, pendulum ganda, dan pendulum dual.

**Kata Kunci:** kondisi keterkontrolan, pendulum biasa, pendulum terbalik, pendulum ganda, pendulum dual.

## SISTEM KENDALI

Sistem kendali merupakan sebuah sistem yang terdiri atas satu atau beberapa peralatan yang berfungsi untuk mengendalikan sistem lain yang berhubungan dalam sebuah proses tertentu. Dalam suatu industri, semua variabel proses seperti daya, suhu, dan laju alir harus dipantau setiap saat. Bila variabel proses tersebut berjalan tidak sesuai dengan yang diharapkan, maka sistem kendali dapat mempengaruhi proses tersebut sedemikian sehingga sistem dapat berjalan kembali seperti yang diharapkan. Dalam prakteknya, untuk melakukan fungsi pengendalian, perlu dibuat model matematika yang menghubungkan antara masukan (input), proses, dan keluaran (output). Pada sistem kendali, model yang lazim digunakan adalah model ruang keadaan (*state space model*). Dalam model ini, persamaan diferensial dari sistem yang semula berorde  $n$  diubah menjadi  $n$  persamaan diferensial berorde satu. Dengan menggunakan model ruang keadaan, maka sistem kendali optimal dapat diterapkan pada proses yang kompleks, baik linear maupun taklinear. Sistem kendali optimal juga dapat digunakan untuk mengendalikan sistem proses dengan banyak masukan dan banyak keluaran.

## Representasi Ruang-Keadaan

Keadaan suatu sistem (*system state*) didefinisikan sebagai sekumpulan peubah yang disebut peubah keadaan (*state variables*) yang pada waktu awal  $t_0$  bersama-sama peubah input secara lengkap menentukan perilaku sistem pada waktu  $t > t_0$  [4]. Bagaimana peubah keadaan berubah sebagai fungsi waktu dapat

---

<sup>1</sup>Mahasiswa Program Studi S-2 Matematika Terapan, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor, Jl Meranti Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680.

<sup>2</sup>Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor, Jl Meranti Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680.

dipandang sebagai sebuah trajektori di ruang berdimensi  $n$  dan disebut ruang-keadaan (*state-space*).

Cara yang lazim dilakukan untuk merepresentasikan sistem fisik ialah melalui model ruang-keadaan (*state-space model*), yang boleh jadi taklinear:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)). \quad (1)$$

Model ruang-keadaan linear padanannya kemudian dapat diperoleh melalui pelinearan terhadap model (1), dan ditulis

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2)$$

dengan  $x(t)$  vektor keadaan berdimensi  $n$ ,  $u(t)$  vektor input kendali berdimensi  $m$ ,  $A$  matrik sistem berukuran  $n \times n$ , dan  $B$  matrik input kendali berukuran  $m \times n$ .

Transformasi Laplace terhadap (2) memberikan  $X(s) = (sI - A)^{-1}x(t_0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$  dan transformasi Laplace balikan menghasilkan

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad (3)$$

dengan eksponensial matriks diberikan oleh  $e^{At} = I + \sum_{k=1}^n (At)^k/k!$ . Bentuk (3) disebut sebagai solusi dari model ruang-keadaan (2) atau respons sistem  $x(t)$  pada  $t > t_0$ .

### Keterkontrolan

Konsep keterkontrolan (*controllability*) pertama kali diperkenalkan oleh Kalman [5] dan memainkan peran penting dalam pengendalian sistem multi-peubah.

**Definisi 1 (Terkontrol)** Sistem dinamik (2) dikatakan terkontrol (*controllable*) jika untuk sembarang keadaan awal  $x(t_0) = x_0$ , sembarang waktu  $t_1 > t_0$ , dan sembarang keadaan akhir  $x_1$ , selalu dapat ditemukan peubah kendali  $u(t)$  sedemikian sehingga  $x(t_1) = x_1$ . Selain keadaan tersebut, sistem dikatakan tak-terkontrol [11].

Dari (3) dapat diverifikasi bahwa input kendali  $u$  yang membawa sistem dari  $(t_0, x_0)$  ke  $(t_1, x_1)$  ialah

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t_0)} W^{-1}(t_1) (e^{At_1} x(t_0) - x_1), \quad (4)$$

dengan  $W$  merupakan matriks Gramian, yaitu  $W(t) = \int_{t_0}^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$ . Ada beberapa cara untuk memeriksa keterkontrolan suatu sistem. Salah satunya dengan cara menganalisis kebebasan linear ruang vektor yang direntang oleh matriks sistem  $A$  dan matriks input  $B$ . Tanpa kehilangan sifat keumuman, misalkan  $t_0 = 0$  dan  $x(t_1) = x_1 = 0$ . Dari (3), keterkontrolan  $x_0$  ke  $x_1$  dituliskan sebagai

$$0 = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau,$$

yang dapat ditulis lebih lanjut menjadi

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Dengan menyubstitusikan matriks eksponensial  $e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k$  ke dalam (5) diperoleh

$$x_0 = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Permisalan  $\beta_k = \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau$  menghasilkan

$$x_0 = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k = [A \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] \beta, \quad (6)$$

dengan  $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{n-1}]^T$ . Kondisi (6) mengungkapkan bahwa keterkontrolan sistem (2) bergantung pada matriks  $[A \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$ . Jika matriks ini memiliki  $n$  vektor baris atau  $n$  vektor kolom bebas linear, atau dengan kata lain matriks tersebut berpangkat penuh (atau taksingular), maka sistem (2) terkontrol.

**Teorema 1 (Keterkontrolan)** Syarat perlu dan cukup agar sistem (2) terkontrol ialah matriks keterkontrolan (controllability matrix)  $C$  berikut:

$$C = [A \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] \quad (7)$$

berpangkat penuh [4, 6, 11].

**Contoh 1** Diberikan sistem (8) dan (9) berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (9)$$

Berdasarkan (7) diperoleh matriks-matriks keterkontrolan untuk sistem (8) dan (9), berturut-turut

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dapat dihitung dengan mudah bahwa  $C_1$  berpangkat 2 (penuh) dan  $C_2$  berpangkat 1 (tidak penuh). Dengan demikian, sistem (8) terkontrol dan sistem (9) tidak terkontrol.

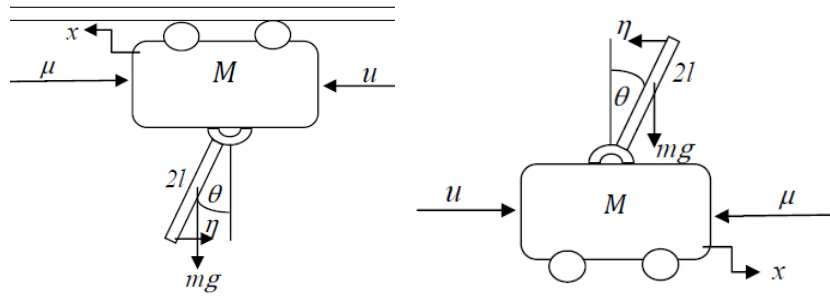
Tulisan ini bertujuan mengidentifikasi kondisi keterkontrolan beberapa sistem pendulum berdasarkan parameter model menggunakan Teorema 1. Analisis diawali dengan penurunan persamaan gerak pendulum yang kemudian diubah ke dalam bentuk persamaan ruang-keadaan.

## SISTEM PENDULUM

Pendulum merupakan peralatan laboratorium yang banyak dimanfaatkan dalam pendidikan dan penelitian di bidang sistem kendali (*control system*). Sistem pendulum, baik pendulum biasa (*direct pendulum*), pendulum terbalik (*inverted pendulum*), pendulum ganda (*double pendulum*), maupun pendulum dual (*dual pendulum*), lazim dijadikan wahana simulasi untuk mengevaluasi sistem aktual karena memiliki karakteristik yang kaya, misalnya dapat bersifat taklinear dan takstabil, dapat dilinearkan di sekitar titik kesetimbangan, kompleksitasnya dapat ditingkatkan melalui penambahan atau penggabungan pendulum atau modifikasi lainnya, dan mudah diterapkan dalam sistem aktual. Banyak hasil penelitian dievaluasi melalui studi simulasi terhadap sistem pendulum. Di bidang teknik, pergerakan fondasi bendungan, jembatan, dermaga, dan struktur bangunan lainnya dapat dikaji melalui studi terhadap sistem pendulum biasa dan terbalik sedangkan alat pengangkat peti kemas (*cranes*) bekerja atas dasar pendulum biasa. Pendeteksian usikan gelombang seismik dalam tanah yang diakibatkan oleh aktivitas seismik-makro, oseanik, dan atmosferik dipelajari melalui sistem pendulum terbalik dilakukan oleh Taurasi [12]. Di bidang psikologi dan ilmu olahraga, prinsip kerja pendulum terbalik banyak digunakan untuk mengkaji keseimbangan gerak manusia [7, 8, 9]. Kajian terhadap aspek teoretis sistem pendulum pun banyak dilakukan. Sebagai contoh, Atay [2] mempelajari masalah kestabilan asimtotik sistem pendulum dengan menggunakan umpanbalik posisi (*position feedback*), sedangkan Woodyatt *et al.* [13] mengkaji kendala-kendala fundamental dalam pengendalian sistem pendulum terbalik dengan dua-input dan dua-output (*two-input two-output/TITO*), sedangkan Bakhtiar [3] mengidentifikasi beberapa parameter yang mempengaruhi kestabilan sistem pendulum terbalik pada masalah galat penjejakan (*tracking error*).

### Sistem Pendulum Biasa dan Terbalik

Di bagian ini diperhatikan sistem pendulum biasa dan terbalik seperti pada Gambar 1 [3, 10], di mana sebuah pendulum dimuat dalam motor yang bisa digerakkan. Diasumsikan motor bergerak dalam satu dimensi, yaitu maju atau mundur dalam satu garis lurus, sedangkan pendulum diasumsikan hanya bergerak dalam bidang vertikal yang datar.



Gambar 1 Sistem pendulum biasa (kiri) dan terbalik (kanan)

Berat kereta dinotasikan dengan  $M$  dan berat pendulum dengan  $m$ , semuanya dalam kilogram. Panjang pendulum dilambangkan dengan  $2l$  (meter). Pada saat  $t$ , sebuah gaya  $u(t)$  dikenakan pada kereta melalui sebuah motor yang tertempel padanya. Berturut-turut  $x(t)$  dan  $\theta(t)$  menyatakan posisi kereta terhadap titik awal dan sudut yang dibentuk oleh pendulum pada saat  $t$ . Kedua parameter ini diukur oleh potensiometer yang diletakkan di titik pivot dan di roda kereta. Pendulum diasumsikan seragam (*uniform*) sehingga inersianya diberikan oleh  $J = ml^2/3$ . Diasumsikan friksi antara pendulum dengan kereta sebesar  $\eta$  dan friksi antara kereta dan lintasan sebesar  $\mu$ . Jika diasumsikan bahwa sudut yang dibentuk oleh pendulum adalah cukup kecil maka persamaan gerak linear sistem pendulum biasa diberikan oleh persamaan-persamaan berikut:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + \mu\dot{x} = u, \quad (10)$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\theta + \eta\dot{\theta} = 0, \quad (11)$$

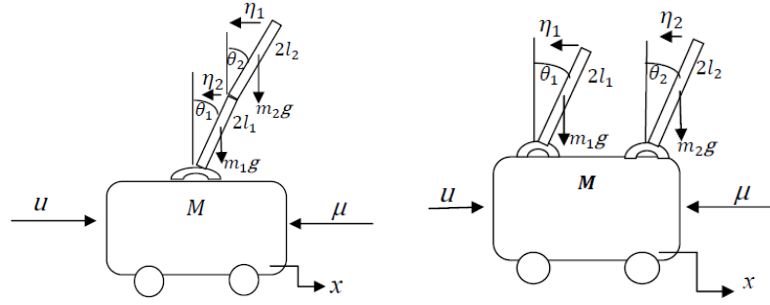
sedangkan persamaan gerak linear sistem pendulum terbalik diberikan oleh

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + \mu\dot{x} = u, \quad (12)$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} - mgl\theta + \eta\dot{\theta} = 0. \quad (13)$$

### Sistem Pendulum Ganda dan Dual

Yang dimaksud dengan sistem pendulum ganda adalah sistem pendulum terbalik dengan dua pendulum yang disusun seri (Gambar 2 kiri), sedangkan pada sistem pendulum dual, dua pendulum tersebut disusun paralel (Gambar 2 kanan). Pada sistem ini,  $m_i$  dan  $l_i$  berturut-turut merupakan massa dan panjang pendulum ke- $i$ ,  $\theta_i$  adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu tegak dan pendulum ke- $i$ , serta  $\eta_i$  melambangkan friksi antara pendulum ke- $i$  dengan kereta.



Gambar 2 Sistem pendulum ganda (kiri) dan dual (kanan)

Persamaan gerak pendulum ganda terlinearkan diberikan oleh model (14)-(16) berikut [1]:

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 + 2m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 + \mu\dot{x} = u, \quad (14)$$

$$(m_1 + 2m_2)l_1\ddot{x} + \frac{4}{3}m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + 4m_2l_1^2\ddot{\theta}_1 + 2m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 - m_1gl_1\theta_1 - 2m_2gl_1\theta_1 + (\eta_1 + \eta_2)\dot{\theta}_1 = 0, \quad (15)$$

$$m_2l_2\ddot{x} + 2m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + \frac{4}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2gl_2\theta_2 + \eta_2\dot{\theta}_2 = 0, \quad (16)$$

sedangkan persamaan gerak pendulum dual terlinearkan diberikan oleh model (17)-(19) berikut [14]:

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 + \mu\dot{x} = u, \quad (17)$$

$$m_1l_1\ddot{x} + \frac{4}{3}m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 - m_1gl_1\theta_1 + \eta_1\dot{\theta}_1 = 0, \quad (18)$$

$$m_2l_2\ddot{x} + \frac{4}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2gl_2\theta_2 + \eta_2\dot{\theta}_2 = 0, \quad (19)$$

Pada bab selanjutnya akan diidentifikasi kondisi keterkontrolan empat sistem pendulum di atas berdasarkan Teorema 1.

## KONDISI KETERKONTROLAN

Langkah pertama dalam penerapan Teorema 1 adalah merepresentasikan sistem persamaan gerak pendulum dalam bentuk model ruang-keadaan (2). Untuk keperluan ini perlu diidentifikasi peubah keadaan berdasarkan input kendali  $u$  sehingga terbentuk matriks sistem  $A$  dan matriks input  $B$ . Untuk semua sistem pendulum, posisi motor  $x$ , kecepatan motor  $\dot{x}$ , sudut antara pendulum dengan garis normal  $\theta$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , dan kecepatan angular sudut  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$ , ditetapkan sebagai peubah-peubah keadaan. Diasumsikan tidak ada friksi antara pendulum dengan kereta, yaitu  $\eta = 0$ , untuk menyederhanakan.

Pada sistem pendulum biasa (10)-(11), dengan memandangnya sebagai sistem persamaan linear dalam  $\ddot{x}$  dan  $\ddot{\theta}$ , diperoleh model ruang keadaan berikut:

$$\ddot{\theta} = \frac{-3g(M + m)\theta - 3u}{l(4M + m)},$$

$$\ddot{x} = \frac{3mg\theta + 4u}{4M + m}.$$

Dengan demikian diperoleh representasi ruang-keadaan sistem pendulum biasa sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} u, \quad (21)$$

di mana  $a = \frac{3g(M+m)}{l(4M+m)}$ ,  $b = \frac{3}{l(4M+m)}$ ,  $c = \frac{3mg}{4M+m}$ , dan  $d = \frac{4}{4M+m}$ , yang semuanya merupakan kuantitas taknegatif. Matriks keterkontrolan  $C_1$  beserta matriks eselon baris tereduksi diberikan oleh

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 & ab \\ -b & 0 & ab & 0 \\ 0 & d & 0 & -bc \\ d & 0 & -bc & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} d & 0 & -bc & 0 \\ 0 & d & 0 & -bc \\ 0 & 0 & ab - \frac{cb^2}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab - \frac{cb^2}{d} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Perhatikan bahwa pangkat suatu matriks dengan pangkat matriks ekuivalen barisnya adalah sama. Dengan mengingat bahwa semua kuantitas taknegatif,  $C_1$  pada (20) berpangkat takpenuh ketika setidaknya satu baris atau kolom memiliki elemen yang semuanya nol, yaitu

$$ab - \frac{cb^2}{d} = 0 \Leftrightarrow \frac{3g}{4l} = 0.$$

Persamaan di atas menggambarkan kondisi yang tidak mungkin terjadi. Dengan demikian, sistem pendulum biasa selalu terkontrol.

Menggunakan cara yang serupa, diperoleh representasi ruang-keadaan dan matriks keterkontrolan sistem pendulum terbalik berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} u, \quad (23)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 & -ab \\ -b & 0 & -ab & 0 \\ 0 & d & 0 & bc \\ d & 0 & bc & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -b & 0 & -ab & 0 \\ 0 & -b & 0 & -ab \\ 0 & 0 & bc - ad & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bc - ad \end{bmatrix}, \quad (24)$$

dengan  $a = \frac{3g}{4l}(1 + \frac{3m}{4M+m})$ ,  $b = \frac{3}{l(4M+m)}$ ,  $c = \frac{3mg}{4M+m}$ , dan  $d = \frac{4}{4M+m}$ . Kondisi keterkontrolan ditentukan oleh

$$bc - ad = 0 \Leftrightarrow -\frac{3g}{l(4M+m)} = 0,$$

yang menunjukkan bahwa sistem pendulum terbalik pun selalu terkontrol.

Dengan adanya dua pendulum pada sistem pendulum ganda dan dual maka peubah keadaan kedua sistem tersebut berdimensi enam. Dapat diverifikasi bahwa sistem pendulum ganda memiliki representasi ruang-keadaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -w & 0 & y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \\ v \\ 0 \\ z \end{bmatrix} u, \quad (25)$$

dengan  $p = \frac{9g(4M+5m)}{2l_1(14M+4m)}$ ,  $q = \frac{9g(2M+m)}{2l_1(14M+4m)}$ ,  $r = \frac{18}{2l_1(14M+4m)}$ ,  $s = \frac{27g(2M+m)}{2l_2(14M+4m)}$ ,  $t = \frac{3g(16M+5m)}{2l_2(14M+4m)}$ ,  $v = \frac{6}{2l_2(14M+4m)}$ ,  $w = \frac{27mg}{14M+m}$ ,  $y = \frac{3mg}{14M+m}$ , dan  $z = \frac{14}{14M+m}$ . Matriks keterkontrolan dapat dikonstruksi berdasarkan (7) dengan menggunakan matriks  $A$  dan  $B$  pada (25) di atas. Selanjutnya dapat diperoleh matriks eselon baris tereduksi dengan menggunakan operasi baris dasar. Dapat ditunjukkan bahwa (25) tidak terkontrol ketika  $l_1 = 5l_2$  dan  $m_1 = m_2$ . Pembaca yang tertarik dengan penurunan kondisi ketakterkontrolan tersebut dapat merujuk ke Sakirman [10].

Sementara itu dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa sistem pendulum dual selalu terkontrol kecuali ketika  $l_1 = l_2$  [10]. Di pustaka ini juga pembaca dapat menemukan kondisi keterkontrolan pada sistem pendulum dengan lintasan miring.

## SIMPULAN

Pada tulisan ini telah dibahas kondisi keterkontrolan empat sistem pendulum, yaitu sistem pendulum biasa dan terbalik serta sistem pendulum ganda dan dual. Representasi ruang-keadaan diperoleh dari persamaan gerak pendulum yang diturunkan dari hukum kekekalan energi. Berdasarkan representasi tersebut diperoleh matriks keterkontrolan yang darinya dapat dianalisis berbagai kondisi keterkontrolan sistem. Sudah ditunjukkan bahwa sistem pendulum biasa dan terbalik selalu terkontrol, sedangkan sistem pendulum ganda tidak terkontrol ketika  $l_1 = 5l_2$  dan  $m_1 = m_2$ . Sistem pendulum dual tidak terkontrol ketika  $l_1 = l_2$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Assidiqi H. 2008. Pemodelan sistem pendulum terbalik ganda dan karakterisasi parameter pada masalah regulasi optimal. *Tesis Program Studi S-2 Matematika Terapan*, Departemen Matematika IPB. Bogor.
- [2] Atay FM. 1999. Balancing the inverted pendulum using position feedback. *App. Math. Lett.* 12: 51-56.
- [3] Bakhtiar T. 2010. Masalah galat penjejakan minimum pada sistem pendulum terbalik. *J. Mat. Apl.* 9(1): 11-17.
- [4] Burns RS. 2001. *Advanced control engineering*. Oxford: Butterworth-Heinemann.



- [5] Kalman RE. 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME-J. Basic Eng.* 82.D: 35-45.
- [6] Kuo BC. 1987. *Automatic control systems. Fifth Edition*. New Jersey: Prentice-Hall.
- [7] Loram ID, Lakie M. 2002. Human balancing of an inverted pendulum: position control by small, ballistic-like, throw and catch movements. *J. Physiol.* 540(3): 1111-1124.
- [8] Loram ID, Gawthrop PJ, Lakie M. 2006. The frequency of human, manual adjustments in balancing an inverted pendulum is constrained by intrinsic physiological factors. *J. Physiol.* 577(1): 417-432.
- [9] Loram ID, Kelly SM, Lakie M. 2001. Human balancing of an inverted pendulum: is sway size controlled by ankle impedance? *J. Physiol.* 532(3): 879-891.
- [10] Sakirman. 2009. Keterkontrolan beberapa sistem pendulum. *Tesis Program Studi S-2 Matematika Terapan*, Departemen Matematika IPB. Bogor.
- [11] Skogestad S, Postlethwaite I. 1996. *Multivariable feedback control: analysis and design*. New York: John Wiley & Sons.
- [12] Taurasi I. 2005. Inverted Pendulum Studies for Seismic Attenuation. *SURF Final Report LIGO T060048-00-R*, California Institute of Technology, USA.
- [13] Woodyatt AR, Middleton RH, Freudenberg JS. 1997. Fundamental constraints for the inverted pendulum problem. *Technical Report EE9716*, Department of Electrical and Computer Engineering, the University of Newcastle, Australia.
- [14] Yusron M. 2009. Karakterisasi parameter sistem pendulum terbalik dual pada masalah tracking optimal. *Tesis Program Studi S-2 Matematika Terapan*, Departemen Matematika IPB. Bogor.

